Всероссийская олимпиада по математике
Муниципальный этап 20116–2017 уч. г.

7 класс

7.1. В 7а классе по списку 60% девочек. Когда из-за болезни в класс не пришли два мальчика и одна девочка, то девочек присутствовало 62,5%. Сколько в классе по списку девочек и мальчиков?

Ответ: 21 девочка и 14 мальчиков. **Указание**. Пусть по списку в классе d девочек и m мальчиков. Из условий задачи имеем два уравнения: $\frac{d}{d+m}=0{,}6$ и $\frac{d-1}{d+m-3}=0{,}625$. Из первого уравнения $2d=3m$. Подставив $m=\frac{2}{3}d$ во второе уравнение и решив его, получим $d = 21$, и тогда $m = 14$.

7.2. В трехзначном числе зачеркнули первую цифру и получили двузначное. Если на это двузначное число поделить исходное, то частное будет равно 9, а остаток 8. Найдите исходное число. (Приведите все возможные решения.)

Ответ: 4 возможных числа: 224; 449; 674; 899. **Указание**. Пусть x – первая цифра исходного числа, y – двузначное число после зачеркивания x. Тогда имеем уравнение $100x+y=9y+8 \Leftrightarrow 2y+2=25x$. Значит, x – четное число: $x=2z$ для некоторого z ($z\le 4$). Поэтому $y+1=25z$, и для числа $y + 1$ возможные значения: 25; 50; 75; 100, а соответствующие числа x равны 2; 4; 6; 8.

.

7.3. На ребрах куба в некотором порядке расставили числа 1, 2, ..., 12 и для каждой грани подсчитали сумму четырех чисел на ее ребрах. Докажите, что есть грань, для которой эта сумма больше 25.

Указание. Подсчитаем на каждой грани соответствующую сумму и затем сложим эти суммы для всех шести граней. Получим в результате (1 + 2 + … + 12)·2, так как при таком подсчете любое ребро будет засчитано дважды. Итак, общая сумма 156, и тогда хотя бы для одной грани ее сумма не меньше $\frac{156}{6}=26$. (Действительно, в противном случае мы получили бы общую сумму не больше $25\cdot 6=150<156$).

.

7.4. Целые числа m, n удовлетворят равенству $9m=11n$. Докажите, что $m + n$ делится на 20.

Указание. Поскольку числа 9 и 11 взаимно просты, то число m должно делиться на 11, а число n на 9. Пусть $m = 11k$, тогда $9\cdot 11k=11n \Leftrightarrow n=9k$. Поэтому $m+n=11k+9k=20k$.

7.5. Дан прямоугольник, отличный от квадрата, у которого численное значение площади втрое больше периметра. Докажите, что одна из сторон прямоугольника больше 12.

Указание. Пусть a,b $(a<b)$ – стороны прямоугольника. По условию, $ab=3(2a+2b)$, отсюда получаем равенство $(a-6)(b-6)=36$. Если оба числа a – 6 и b – 6 положительны, но меньше 6, то $(a-6)(b-6)<36$, что противоречит полученному равенству. Аналогичное противоречие получается, когда оба числа a – 6 и b – 6 больше 6 (хотя формально в этом случае искомое неравенство выполняется). Если оба числа a – 6 и b – 6 отрицательны, то $(a-6)(b-6)=(6-a)(6-b)<6\cdot 6$, что также невозможно. Значит, $a-6<6$ и $b-6>6$, т.е. $a < 12$, $b > 12$

8 класс

8.1. В 7а классе по списку 60% девочек. Когда из-за болезни в класс не пришли два мальчика и одна девочка, то девочек присутствовало 62,5%. Сколько в классе по списку девочек и мальчиков?

Ответ: 21 девочка и 14 мальчиков. **Указание**. См. задачу 7.1.

8.2. На шахматную доску поставили 8 ладей, которые не бьют друг друга. Докажите, что в любом «клетчатом» прямоугольнике размера 4×5 (клеток) есть хотя бы одна ладья.

Указание. Предположим противное, и пусть, для определенности, прямоугольник расположен в пяти горизонталях и четырех вертикалях. Тогда любая ладья находится среди остальных трех горизонталей или среди остальных четырех вертикалей (или одновременно, т.е. на их пересечении). Но в трех горизонталях стоят три ладьи, а в четырех вертикалях – четыре. Значит, всего в этих горизонталях и вертикалях стоит не более семи ладей (точнее, количество ладей равно 7 минус количество ладей на пересечениях данных горизонталей и вертикалей). Получили противоречие, т.к. ладей всего 8.

8.3. Дан остроугольный треугольник *ABC*. Точка *M* – точка пересечения его высот. Найдите угол *A*, если известно, что *AM* = *BC*.

Ответ: 45°. **Указание**. Пусть *K* – основание высоты из точки *B*. Докажем, что треугольники *AMK* и *BKC* равны. Действительно, имеем прямоугольные треугольники, у которых $\angle MAK = \angle CBK = 90° - \angle C$ и, по условию, *AM* = *BC*. Тогда из равенства треугольников следует, что *AK* = *BK*, и значит, в прямоугольном треугольнике *ABK* катеты равны. Поэтому $\angle A = 45°$.

8.4. Докажите, что для всех натуральных $n > 1$ число $n^{2016} + 4$ составное.

Указание. Результат следует из разложения $n^{2016}+4 = n^{2016}+4n^{1008}+4-4n^{1008} = (n^{1008}+2)^2-(2n^{504})^2 = (n^{1008}+2n^{504}+2)(n^{1008}-2n^{504}+2)$, и при $n > 1$ обе скобки больше 1.

8.5. Дан прямоугольник, отличный от квадрата, у которого численное значение площади втрое больше периметра. Докажите, что одна из сторон прямоугольника больше 12.

Указание. См. задачу 7.5.

9 класс

9.1. **а)** Дан треугольник, у которого высоты равны 4; 5; 6. Какой это треугольник: остроугольный, прямоугольный или тупоугольный? **б)** Существует ли треугольник, у которого высоты равны 2; 3; 6?

Ответ: **а)** остроугольный; **б)** не существует. **Указание**. Из формулы площади треугольника $S = ah/2$ следует, что стороны данного треугольника равны $\frac{2S}{4};\frac{2S}{5};\frac{2S}{6}$ (такой треугольник существует, поскольку $\frac{1}{4}<\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$). Для того чтобы узнать, какой это треугольник, надо сравнить квадрат большей стороны с суммой квадратов других сторон. В данном случае из неравенства $\left(\frac{1}{4}\right)^2<\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2$ следует, что треугольник остроугольный. **б)** Поскольку $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, неравенство треугольника не выполняется, и значит, такого треугольника не существует.

9.2. На шахматную доску поставили 8 ладей, которые не бьют друг друга. Докажите, что в любом «клетчатом» прямоугольнике размера 4×5 (клеток) есть хотя бы одна ладья..

Указание. См. задачу 8.2.

9.3. Дан остроугольный треугольник *ABC*. Точка *M* – точка пересечения его высот. Найдите угол *A*, если известно, что *AM* = *BC*.

Ответ: 45°. **Указание**. См. задачу 8.3.

9.4. Докажите, что существует натуральное число, которое делится на 5^{100} и состоит (в десятичной записи) только из нечетных цифр.

Указание. Докажем по индукции более общий факт: для любого натурального *n* существует число, составленное ровно из *n* нечетных цифр и делящееся на 5^n. База индукции легко проверяется для числа 5 (а также для 75, 375). Докажем индукционный переход: предположим, что число a_k составлено из *k* нечетных цифр и делится на 5^k, т.е. $a_k = 5^k \cdot p$ для некоторого целого *p*, и покажем, что к этому числу можно приписать слева нечетную цифру *x* так, чтобы число $\overline{xa_k}$ делилось на 5^{k+1}, т.е. $x\cdot 10^k + p\cdot 5^k$ должно делиться на 5^{k+1}, что равносильно тому, что $x\cdot 2^k + p$ должно делиться на 5. Если брать в качестве *x* пять различных нечетных цифр 1, 3, 5, 7, 9, то числа $x\cdot 2^k + p$ будут иметь разные остатки при делении на 5 (в противном случае для разных x_1, x_2 число $(x_1\cdot 2^k + p)-(x_2\cdot 2^k + p) = (x_1 - x_2)\cdot 2^k$

делилось бы на 5). Значит, для какой-то нечетной цифры x число $x\cdot 2^k + p$ делится на 5, что и требовалось.

9.5. Дан прямоугольник, у которого численное значение площади больше утроенного периметра. Докажите, что его периметр больше 48.

Указание. Пусть a, b – стороны прямоугольника. Из условия задачи $ab > 3(2a+2b) \Leftrightarrow$

$$(a-6)(b-6) > 36 \quad (*)$$

Сначала проверим, что оба множителя $(a-6)$ и $(b-6)$ положительны. Действительно, в противном случае из (*) следует, что $a-6<0$, $b-6<0$. Тогда $-6<a-6<0$, $-6\le b-6<0$ и поэтому $(a-6)(b-6)=(6-a)(6-b)<6\cdot 6=36$, что противоречит (*). Теперь для положительных чисел $(a-6)$ и $(b-6)$ можно воспользоваться неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим: $(a-6)+(b-6)\ge 2\sqrt{(a-6)(b-6)} > 12 \Rightarrow a+b>24 \Leftrightarrow P>48$.

10 класс

10.1. **а)** Дан треугольник, у которого высоты равны 4; 5; 6. Какой это треугольник: остроугольный, прямоугольный, тупоугольный? **б)** Существует ли треугольник, у которого высоты равны 2; 3; 6?

Ответ: **а)** остроугольный; **б)** не существует. **Указание**. См. задачу 9.1.

10.2. Докажите неравенство для положительных чисел x, y: $\sqrt{x^2+y}+\sqrt{y^2+x}\ge\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}$.

Указание. После возведения обеих частей в квадрат (что дает равносильное неравенство в силу положительности x и y) получим $\sqrt{(x^2+y)(y^2+x)}\ge\sqrt{(x^2+x)(y^2+y)}$. Еще раз возведя в квадрат, получим равносильное неравенство $x^3+y^3\ge x^2y+y^2x \Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2)\ge(x+y)xy \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2\ge 0$. Последнее неравенство очевидно для положительных x и y.

10.3. Можно ли разбить квадрат 10×10 на 100 равных прямоугольников, у каждого из которых длины неравных сторон отличаются на единицу?

Ответ: нельзя. **Указание**. Предположим, что такое разбиение существует, и пусть x, y – стороны прямоугольника разбиения ($x\ge y$). Тогда имеем два уравнения: $xy=1$ (для площади) и $x-y=1$ (по условию). Решая квадратное уравнение для x, находим $x=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}$, тогда $y=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$. Рассмотрим сторону квадрата 10×10. Она составлена из нескольких больших и нескольких меньших сторон нашего прямоугольника, т.е. $10=nx+my$ для некоторых целых неотрицательных m, n. Тогда $10=\frac{m+n}{2}\sqrt{5}+\frac{m-n}{2}$. Поскольку $m+n\ne 0$, получаем противоречие: в правой части последнего равенства стоит иррациональное число, а в левой – рациональное.

10.4. Докажите, что существует натуральное число, которое делится на 5^{100} и состоит (в десятичной записи) только из нечетных цифр.

Указание. См. задачу 9.4.

10.5. Дана окружность единичного радиуса с центром O. Точка A находится на расстоянии a от центра ($0<a<1$). Через точку A проводят всевозможные хорды MN. **а)** Найдите длину наименьшей хорды MN. **б)** Найдите наибольшую площадь треугольника OMN.

Ответ: **а)** $2\sqrt{1-a^2}$; **б)** при $a\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ наибольшая площадь равна $\frac{1}{2}$; при $a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ наибольшая площадь равна $a\sqrt{1-a^2}$. **Указание**. **а)** По свойству хорд, пересекающихся в данной точке, произведение длин $MA\cdot AN=(1+a)(1-a)$ есть постоянное число. Тогда из неравенства о средних имеем $MN=MA+AN\ge 2\sqrt{MA\cdot AN}=2\sqrt{1-a^2}$, причем равенство достигается, когда $MA = AN$, т.е. для хорды MN, перпендикулярной диаметру, проходящему через точку A. **б)** Обозначим $\alpha=\angle MON$. Очевидно, $0<\alpha\le\pi$ (α становится равным π, когда хорда MN совпадает с диаметром, проходящем через A). Из формулы площади

$S_{MON}=\frac{1}{2}R^2\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha$ следует, что требуется найти наибольшее значение $\sin\alpha$. Пусть $M_0N_0\perp OA$ (т.е. это оптимальное положение хорды из пункта а)) и $\alpha_0=2\,\mathrm{acr}\cos a$ – соответствующее значение угла M_0ON_0. Заметим, что $\alpha_0\le\alpha$ для любого положения *MN*, т.к. $MN=2\sin\frac{\alpha}{2}$, где $\frac{\alpha}{2}\le\frac{\pi}{2}$, и поэтому в силу пункта а) и монотонности синуса, большему значению *MN* соответствует больший угол α. Если $a\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\alpha_0\le\frac{\pi}{2}$ и в этом случае, изменяя положение хорды *MN*, можно найти такое положение, когда $\alpha=\frac{\pi}{2}$ (т.к. при приближении *MN* к диаметру угол α становится близким к π). Если же $a<\frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\alpha_0>\frac{\pi}{2}$ и поэтому в силу неравенства $\alpha\ge\alpha_0>\frac{\pi}{2}$ и монотонного убывания функции *sin x* во второй четверти, наибольшее значение $\sin\alpha$ будет при $\alpha=\alpha_0$.

11 класс

11.1. Решите неравенство $\frac{x+\sin 5}{\sin 6}<\frac{\sin 5}{x+\sin 6}$.

Ответ: $x\in(0;-\sin 6)\cup(-\sin 5-\sin 6;+\infty)$. **Указание**. Заметим, что $\sin 5<0$ и $\sin 6<0$, т.к. $\pi<5<6<2\pi$. Неравенство перепишем в виде

$$\frac{x(x+\sin 5+\sin 6)}{\sin 6(x+\sin 6)}<0\Leftrightarrow\frac{x(x-(-\sin 5-\sin 6))}{x-(-\sin 6)}>0.$$

Методом интервалов получаем ответ (поскольку $-\sin 5-\sin 6>-\sin 6>0$).

11.2. Докажите неравенство для положительных чисел *x, y*: $\sqrt{x^2+y}+\sqrt{y^2+x}\ge\sqrt{x^2+x}+\sqrt{y^2+y}$.

Указание. См. задачу 10.2.

11.3. Можно ли разбить квадрат 10×10 на 100 равных прямоугольников, у каждого из которых длины неравных сторон отличаются на единицу?

Ответ: нельзя. **Указание**. См. задачу 10.3.

11.4. Существуют ли удовлетворяющие уравнению $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=3$ **а)** различные натуральные числа *x, y, z* ? **б)** различные целые числа *x, y, z* ?

Ответ а) не существуют, **б) с**уществуют. **Указание**. **а)** Из неравенства о средних для трех положительных чисел следует, что $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\ge3\sqrt[3]{\frac{x}{y}\frac{y}{z}\frac{z}{x}}=3$, причем равенство достигается только в случае равенства чисел $\frac{x}{y},\frac{y}{z},\frac{z}{x}$, т.е. при *x*=*y*=*z*. **б)** Пример *x*=4, *y*=1, *z*= -2 показывает существование искомого решения.

11.5. Дана окружность единичного радиуса с центром *O*. Точка *A* находится на расстоянии *a* от центра ($0<a<1$). Через точку *A* проводят всевозможные хорды *MN*. **а)** Найдите длину наименьшей хорды *MN*. **б)** Найдите наибольшую площадь треугольника *OMN*.

Ответ: **а)** $2\sqrt{1-a^2}$; **б)** при $a\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ наибольшая площадь равна $\frac{1}{2}$; при $a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ наибольшая площадь равна $a\sqrt{1-a^2}$. **Указание**. См. задачу 10.5.